JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 34, 107–137 (1979)

A propos de l'existence et de la régularité des solutions de certaines inéquations quasi-variationnelles

JEAN-LUC JOLY* ET UMBERTO MOSCO[†]

* *U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, Université de Bordeaux I, 33405 Talence, France; and*
† *Istituto Matematico della Università di Roma e GNAFA, CNR, Rome, Italy*

Communicated by J. L. Lions

Received June 1976

We prove existence and regularity results for a general inequality including fixed point problems, variational and quasi variational inequalities. Examples of such problems are considered.

Cet article développe et complète des notes antérieures des auteurs [14], [15], [16].

Les résultats des paragraphes 2 et 3 de la section IV sont dûs à la collaboration avec B. Hanouzet et G. Geymonat. La méthode exposée dans ce travail pour obtenir l'existence de solutions régulières de certaines inéquations quasi-variationnelles (I.Q.V.) a aussi été appliquée avec la collaboration de G.M. Troianiello à un exemple qui n'est pas mentionné ici et traité dans [17], [18].

Les auteurs remercient A. Bensoussan et J.L. Lions pour les discussions sur le sujet qu'il ont eues avec eux.

Le plan adopté est le suivant

Dans la section I, on considère une inéquation générale qui formalise un certain nombre de problèmes classiques—points fixes, points de Nash, inéquations variationnelles et quasi-variationnelles—et on donne pour cette inéquation, dans la section II un théorème abstrait d'existence et de régularité qui est l'adaptation à une situation un peu plus compliquée d'un théorème de Brezis–Nirenberg–Stampacchia [8]. Au reste, ce théorème est l'énoncé du plan d'une méthode applicable à de nombreux exemples concrets.

La section III récapitule et complète la section II dans le cas d'une I.Q.V. pour un opérateur monotone.

Enfin, la section IV est consacrée à une série d'exemples et il s'agit alors essentiellement de vérifier dans chaque cas les hypothèses du théorème abstrait.

0022-1236/79/100029–25$02.00/0

I. Une inéquation générale

Soit C un sous ensemble convexe d'un espace vectoriel réel E, C_1 une partie de C.

Pour tout $u \in C_1$, soit $\varphi(u, \cdot)$ une fonction défine sur C, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et non $\equiv +\infty$; soit $f(\cdot, \cdot)$ une fonction définie sur $C \times C$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, négative ou nulle sur la diagonale de $C \times C$.

Le problème qui nous intéresse est le suivant: Sous des hypothèses de convexité comme la suivante:

(h) $\varphi(u, \cdot) - f(v, \cdot)$ est une fonction convexe sur C pour tout $(u, v) \in C_1 \times C$

existe-t-il $u \in C_1$ vérifiant les inégalités

$$\varphi(u, u) + f(u, w) \leqslant \varphi(u, w) \qquad \forall w \in C? \tag{1}$$

Voici quelques exemples de problèmes qui peuvent se mettre sous la forme (1).

Exemple 1. On suppose $\varphi \equiv 0$, $C_1 = C$. Les inégalités (1) se réduisent alors à:

$$f(u, w) \leqslant 0, \qquad \forall w \in C, \tag{2}$$

qui est l'égalité du minimax de Ky Fan [11].

L'exemple important des inéquations variationnelles s'obtient en prenant $f(u, w) = \langle Au, u - w\rangle$, lorsque $A: C \to E'$, voir [8]. Le cas où φ ne dépend pas de la première variable rentre aussi dans cet exemple, voir [20] et la propriété 1 de ce paragraphe.

Exemple 2. Supposons maintenant que $f \equiv 0$, $C_1 = C$. Les inégalités (1) deviennent alors:

$$\varphi(u, u) \leqslant \varphi(u, w), \qquad \forall w \in C. \tag{3}$$

Si la fonction φ ne prend nulle part la valeur $+\infty$, cet exemple se traite comme l'exemple 1, en posant $f(u, w) = \varphi(u, u) - \varphi(u, w)$. Les inégalités (3) n'ont donc d'intérêt que si φ prend effectivement la valeur $+\infty$.

Considérons deux cas particuliers.

(a) Supposons que φ soit l'indicatrice d'une multiaplication $Q: C \to 2^C$, par exemple

$$\varphi(u, v) = \delta(Q(u), v), \qquad u, v \in C, \tag{4}$$

où $\delta(A, v)$, A étant une partie de E, se définit par $\delta(A, v) = 0$ si $v \in A$, $+\infty$ si $v \notin A$.

Les inégalités (3), avec φ donnée par (4) et $Q(u) \neq \varnothing$ pour tout $u \in C$, définissent exactement les *points fixes* de Q. Les inégalités (3) définissent encore les points fixes de Q si l'on pose:

$$\varphi(u, v) = \delta(Q(v), u), \qquad u, v \in C. \tag{5}$$

On fait alors l'hypothèse que Q est surjective c'est-à-dire que la famille $\{Q(u); u \in C_1\}$ recouvre C. La propriété de convexité réclamée à Q est toutefois différente dans les deux cas:

— pour (4) on doit supposer que Q est à valeurs convexes, tandis que pour (5), c'est la multiapplication Q elle même qui doit vérifier: $v \in Q(u_i) \Rightarrow v \in Q(\sum \lambda_i u_i)$, pour toute combinaison convexe de u_i. Cette seconde hypothèse est considérée par Ky Fan dans [10].

(b) *Les points de Nash* d'un système de fonctions peuvent aussi se définir au moyen de (3). Il s'agit, étant données n fonctions φ_i de n variables $u_1, \dots, u_n$:

$$\begin{array}{l} \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \text{-----------} \\ \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_n), \end{array}$$

de trouver $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n \subset \prod_i E_i$ vérifiant:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \leqslant \varphi_1(v_1, u_2, \dots, u_n), & \forall v_1 \in C_1, \\ \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \leqslant \varphi_2(u_1, v_2, \dots, u_n), & \forall v_2 \in C_2, \\ \text{-----------------------} & \\ \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \leqslant \varphi_n(u_1, u_2, \dots, v_n), & \forall v_n \in C_n. \end{array} \tag{6}$$

Pour réduire (6) à (3), il suffit de poser:

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, \qquad C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$$

avec $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, et de prendre

$$\varphi(u, v) = \varphi_1(v_1, u_2, \dots, u_n) + \varphi_2(u_1, v_2, \dots, u_n) + \cdots + \varphi_n(u_1, u_2, \dots, v_n). \tag{7}$$

Les points de Nash ont été introduits pour définir certains équilibres économiques du type non coopératif.

EXEMPLE 3. Les solutions des inéquations quasi-variationnelles (I.Q.V.) vérifient des inégalité qui ne peuvent pas se résoudre à l'une des deux formes envisagées précédemment.

Ainsi, étant donné, $Q: C_1 \to 2^C$ et $L: C \to E'$ le problème de trouver $u \in C_1$ solution de l'I.Q.V.

$$\begin{aligned} &u \in Q(u), \\ &\langle Lu, u - w\rangle \leqslant \langle g, u - w\rangle, \qquad \forall w \in Q(u), \end{aligned} \tag{8}$$

où $g \in E'$, s'écrit sous la forme (1) en posant:

$$\varphi(u, w) = \delta(Q(u), w), \qquad f(u, w) = \langle Lu, u - v\rangle - \langle g, u - v\rangle. \tag{9}$$

Indiquons, pour terminer ce paragraphe, comment transformer (1) en un problème équivalent pour deux fonctions $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{f}$:

$$\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{u}) + \tilde{f}(\tilde{u}, \tilde{w}) \leqslant \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{w}), \qquad \forall \tilde{w} \in \tilde{C}, \tag{10}$$

avec $\tilde{\varphi}$ de la forme $\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{w}) = \delta(Q(\tilde{u}), \tilde{w})$; donc, avec (10) se mettant sous la forme:

$$\begin{aligned} &\tilde{u} \in Q(\tilde{u}), \\ &\tilde{f}(\tilde{u}, \tilde{w}) \leqslant 0 \qquad \forall \tilde{w} \in Q(\tilde{u}). \end{aligned} \tag{11}$$

PROPOSITION 1. *Si $f(u, u) = 0$ pour tout $u \in C_1$, les inégalités* (1) *sont équivalentes à un problème de la forme* (11).

Preuve. On pose $\tilde{E} = E \times \mathbb{R}$, $\tilde{u} = (u, \alpha)$, $\tilde{v} = (v, \beta)$, $\tilde{w} = (w, \gamma)$, $\tilde{C}_1 = C_1 \times \mathbb{R}$, $\tilde{C} = C \times \mathbb{R}$ et on définit:

$$Q(\tilde{u}) = \operatorname{epi}(\varphi(u, \cdot)) := \{\tilde{w} \in \tilde{C} \mid \varphi(u, w) \leqslant \gamma\}$$

et:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{w}) &= \delta(Q(\tilde{u}), \tilde{w}), \\ \tilde{f}(\tilde{v}, \tilde{w}) &= f(v, w) + \beta - \gamma \end{aligned}$$

pour tout $\tilde{u} \in \tilde{C}_1$, $\tilde{v}, \tilde{w} \in \tilde{C}$.

Les fonctions $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{f}$ vérifient les propriétés du début de ce paragraphe et en particulier l'hypothèse de convexité (h). Il est aussi clair que pour le couple $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{f}$, (10) et (11) sont équivalences.

Montrons que (1) pour φ et f équivaut à (11) pour $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{f}$.

D'abord, si $u \in C_1$ vérifie (1), $\tilde{u} = (u, \varphi(u, u)) \in C_1 \times \mathbb{R} = \tilde{C}_1$ car $\varphi(u, u)$ est nécessairement fini. De plus, $\tilde{u}$ vérifie évidemment $\tilde{u} \in Q(\tilde{u})$ et $\tilde{f}(\tilde{u}, \tilde{w}) \leqslant 0$ pour tout $\tilde{w} \in Q(\tilde{u})$.

Réciproquement, soit $\tilde{u} = (u, \alpha)$ solution de (11). Comme $\tilde{u} \in Q(\tilde{u})$, on a $\varphi(u, u) \leqslant \alpha$. Comme $\tilde{f}(\tilde{u}, \tilde{w}) \leqslant 0$ $\forall \tilde{w} \in \tilde{C}$, il vient $f(u, w) + \alpha - \gamma \leqslant 0$ pour tout $(w, \gamma) \in C \times \mathbb{R}$. Pour $\gamma = \varphi(u, w)$, lorsque $\varphi(u, w) < +\infty$, on obtient:

$$f(u, w) + \alpha - \varphi(u, w) \leqslant 0$$

donc aussi

$$f(u, w) + \alpha \leqslant \varphi(u, w) \qquad \text{pour tout } w \in C. \tag{12}$$

Faisons $w = u$ dans (12):

$$f(u, u) + \alpha \leqslant \varphi(u, u).$$

Comme $\varphi(u, u) \leqslant \alpha$ et comme par hypothèse $f(u, u) = 0$, on déduit que $\varphi(u, u) = \alpha$, ce qui achève la démonstration.

II. Un théorème d'existence et de régularité

Nous indiquons dans cette section un schéma permettant de démontrer l'existence et la régularité de solutions pour le système d'inégalités (1).

Le tout est résumé sous la forme d'un théorème abstrait sans originalité mathématique, que nous donnons néanmoins ici pour son intérêt méthodologique. En effet, sa démonstration est limitée à l'application directe de deux résultats classiques, le lemme de Knaster–Kuratovski–Mazurckiewicz dans la version infini-dimensionnelle de Ky Fan [11] et Brezis–Nirenberg–Stampacchia [8] et le théorème de point fixe de Kakutani [19] et Ky Fan [9].

La justification essentielle de ce théorème vient de ce qu'un certain nombre d'applications intéressantes relèvent de cette méthode. Nous développons ces exemples dans la section IV; voir aussi [18].

1. *La sélection variationnelle S*

Pour caractériser les solutions de (1), introduisons la multiapplication S: $C_1 \to 2^C$, définie pour tout $u \in C_1$ de la façon suivante:

$$S(u) = \{v \in C \mid \varphi(u, v) + f(v, w) \leqslant \varphi(u, w),\ \forall w \in C\}. \tag{13}$$

Ceci est justifié par la remarque que les solutions de (1) sont exactement les points fixes de S définie par (13). On appelle S la *sélection variationnelle* associée au problème (1); voir aussi la section III.

L'existence de solutions pour (1) est démontrée en deux étapes:

(A) S est à valeurs non vides

(B) S admet un point fixe.

La première étape est un problème d'existence pour un problème variationnel, disons une inéquation variationnelle, qu'on peut résoudre avec le lemme de Brezis–Nirenberg–Stampacchia déjà mentionné.

Pour pouvoir appliquer le théorème de Kakutani et Ky Fan dans la deuxième étape, il faut trouver un ensemble convexe $C_0 \subset C_1$ qui soit stable par S et une topologie sur C_0 telle que simultanément C_0 soit un espace compact et S soit semi-continue supérieurement. Or, l'application S n'est pas une donnée explicite du problème, mais elle se trouve définie implicitement via le problème variationnel de l'étape A. Ainsi, tout renseignement supplémentaire sur la structure des solutions du problème variationnel, comme par exemple des résultats de régularité permettant le choix d'un C_0 doué d'une topologie sufficamment forte, s'avère très utile pour étudier les propriétés de la sélection variationnelle S dans l'étape B. Et au bout du compte, on obtient l'existence d'un point fixe de S dans C_0 constitué d'éléments plus "réguliers" que ceux de C_1.

2. *L'étape A*

Dans l'étape A on travaille avec $u \in C_1$ fixé: on a donc besoin de propriétés convenables de $\varphi(u, v)$ et $f(v, w)$ par rapport aux variables v et w. Aux hypothèses de convexité qu'on a déjà introduites au début, et que nous reformulons ici d'une façon affaiblie, on ajoute alors des hypothèses topologiques de *semi-continuité* et *de coercivité*.

Les données sont celles du début de la section 1.

Hypothèse de convexité

(i) Quel que soit $(u, v) \in C_1 \times C$, l'ensemble

$$\{w \in C \mid \varphi(u, v) + f(v, w) > \varphi(u, w)\}$$

est convexe: si $w_1 \in C$ et $w_2 \in C$ vérifient

$$\varphi(u, v) + f(v, w_i) > \varphi(u, w_i), \qquad i = 1, 2,$$

alors on a:

$$\varphi(u, v) + f(v, w) > \varphi(u, w)$$

pour tout $w = tw_1 + (1 - t)w_2$, $0 < t < 1$.

Remarquons incidemment que (i) entraîne, en particulier, pour tout $u \in C_1$ que l'ensemble

$$\operatorname{dom} \varphi(u, \cdot) := \{v \in C \mid \varphi(u, v) < +\infty\}$$

est convexe.

On suppose en outre que E soit muni d'une topologie d'espace localement convexe séparé (e.l.c.s.), telle que les propriétés suivantes soient vérifiées:

Hypothèse de semi-continuité

(*j*) Quel que soit $(u, w) \in C_1 \times C$, la fonction $\varphi(u, \cdot) + f(\cdot, w)$ est s.c.i. sur toute intersection de C avec un sous espace de dimension finie de E.

(jj) Quel que soit $u \in C_1$, quelque soit D sous ensemble convexe de C, et quelle que soit la famille filtrée v_α sur C vérifiant;

$$\varphi(u, v_\alpha) + f(v_\alpha, w) \leqslant \varphi(u, w), \qquad \forall w \in D,$$

et convergeant vers $v \in D$ dans E, on a à la limite

$$\varphi(u, v) + f(v, w) \leqslant \varphi(u, w), \qquad \forall w \in D.$$

Hypothèse de coercivité

(c) Pour tout $u \in C_1$, il existe un sous ensemble compact L_u de E et $w_u \in C \cap L_u$ tel que

$$\varphi(u, v) + f(v, w_u) > \varphi(u, w_u), \qquad \forall v \in C \backslash L_u .$$

Notons que les données du problème (1) et les hypothèses (i), (j) (jj) et (c), lorsque $\varphi \equiv 0$ et $C_1 = C$, sont exactement les données et les hypothèses du théorème 1 de [8].

PROPOSITION 2. *Si φ et f ont les propriétés* (i), (j) (jj) *et* (c), *alors pour tout $u \in C_1$, $S(u)$ est non vide. En outre, $S(u)$ est contenu dans $C \cap L_u$, et il est fermé dans E, pourvu que C soit fermé.*

Preuve. Soit u fixé dans C_1. On associe à tout $w \in C$ l'ensemble

$$F(w) = \{v \in C \mid \varphi(u, v) + f(v, w) \leqslant \varphi(u, w)\}$$

en sorte que:

$$S(u) = \bigcap_{w \in C} F(w).$$

On vérifie alors que la multiapplication F ainsi définie possède les propriétés (6) (7) (8) et (9) du lemme 1 de [8], ce qui entraîne:

$$\bigcap_{w \in C} F(w) \neq \varnothing ;$$

$S(u)$ est donc non vide. Comme, pour tout $v \in S(u)$, on a $v \in C$ et

$$\varphi(u, v) + f(v, w_u) \leqslant \varphi(u, w_u),$$

où w_u est l'élément donné par (c), il en résulte que $S(u)$ est contenu dans $C \cap L_u$; c'est une conséquence de l'hypothèse (c).

Enfin, soit v_α une famille filtrée sur $S(u)$ convergeant vers v dans E. C étant fermé, on a $v \in C$ et comme

$$\varphi(u, v_\alpha) + f(v_\alpha, w) \leqslant \varphi(u, w), \qquad \forall w \in C,$$

on peut utiliser la propriété (jj) avec $D = C$ et on trouve:

$$\varphi(u, v) + f(v, w) \leqslant \varphi(u, w), \qquad \forall w \in C$$

ce qui donne $v \in S(u)$. Donc $S(u)$ est fermé. Remarquons que les ensembles $F(w)$ ne sont pas eux-mêmes en général fermés dans E.

Remarque. Si $\varphi \equiv 0$, $C_1 = C$, la proposition 2 est rien autre que le théorème 1 de [8].

3. *L'étape B*

L'hypothèse fondamentale pour l'étape B est la suivante:

Stabilité par S d'un convexe compact $C_0 \hookrightarrow C_1$

(k) Il existe un sous-espace vectoriel E_0 de E, muni d'une topologie d'e.l.c.s. rendant l'injection $E_0 \hookrightarrow E$ continue, et un sous-ensemble convexe non vide C_0 de $E_0 \cap C_1$, tels que: C_0 est compact dans E_0 et $S(C_0) \subset 2^{C_0}$.

Remarque. Même si on choisit $E_0 = E$, on ne peut pas affirmer en général que un tel C_0 existe. Une condition suffisante—lorsque C est fermé—pour l'existence d'un C_0 qui vérifie (k) avec $E_0 = E$, est que la propriété de coercivité (c) soit vérifiée *uniformément* par rapport à $u \in C_1$: c'est-à-dire, (c) soit satisfaite pour tout $u \in C_1$, avec $L_u = L$, où L est un sous-ensemble (convexe) compact de E qui ne dépend pas de u. Dans ce cas, on peut prendre $C_0 = C \cap L$, qui est compact dans E, et stable par S à cause de la propriété 2.

Comme nous le verrons dans les applications du paragraphe IV, la détermination d'un C_0 convenable est en général une des difficultés principales qu'on rencontre dans la résolution du problème (1).

Dès que E_0 et C_0 ont été fixés, il reste encore à supposer comme on l'a déjà remarqué au n° 1, que la fonction φ possède, par rapport à la fonction f, de bonnes propriétés de continuité sur $C_0 \times C_0$ (pour la topologie déduite de celle de E_0).

Nous énoncons d'abord cette propriété d'une façon tout à fait implicite, portant sur la sélection S. Ensuite, nous donnerons des conditions suffisantes, portant explicitement sur les données φ et f.

Continuité de φ par rapport à f

(l) La trace du graphe de S sur $C_0 \times C_0$ est fermée dans $E_0 \times E_0$.

Remarque. Soulignons que cette condition est d'autant plus faible que la topologie de E_0 est plus forte: nous reviendrons sur cette remarque dans la section IV, remarque 1.

Enfin, on fait l'hypothèse—lorsque la sélection S n'est pas une multiplication constante—que $S(u)$ est convexe pour tout $u \in C_1$. Cette condition est nécessitée par l'emploi du théorème de point fixe de Kakutani–Ky Fan. Il faut remarquer que pour une classe importante de fonctions f, les fonctions *monotones*, cette propriété de convexité se révèle toujours satisfaite: cf. la proposition du n° 4 de cette section II, et son corollaire.

Convexité de $S(u)$

(ll) Lorsque S n'est pas constante sur C_0, quel que soit $u \in C_0$,

$S(u)$ est un ensemble convexe. On a alors le:

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses de convexité* (i), *de semi-continuité* (j) (jj) *et de coercivité* (c); *si* φ *et* f *vérifient en outre* (k), (l) *et* (ll) *par rapport à un convexe* C_0 *dans* $E_0 \hookrightarrow E$, *alors le problème* (1) *admet une solution* u *dans* C_0.

Preuve. A cause de la proposition 2 et des hypothèses (k) et (ll), la multiplication S envoie C_0 dans l'ensemble des parties convexes (fermées) non vides de C_0. Comme C_0 est compact, l'hypothèse (l) entraîne que S est semicontinu supérieurement sur C_0 pour la topologie induite par celle de E_0. Par suite, en vertu du théorème de Kakutani–Ky Fan, S admet un point fixe dans C_0, ce qui démontre le théorème.

Dans les applications on pourra souvent vérifier l'hypothèse (l) moyennant les propriétés (l_1) et (l_2) suivantes:

(l_1) Pour toute famille filtrée (u_α, v_α) sur $C_0 \times C_0$, telle que

$$\varphi(u_\alpha, v_\alpha) + f(v_\alpha, w) \leqslant \varphi(u_\alpha, w), \qquad \forall w \in C,$$

convergeant vers (u, v) dans $E_0 \times E_0$, on a à la limite

$$\varphi(u, v) \leqslant \liminf_\alpha \varphi(u_\alpha, v_\alpha);$$

(l_2) Pour toute famille filtrée (u_α, v_α) comme dans (l_1) et pour tout $w \in C$, on peut trouver $w_\alpha \in C$ vérifiant à la limite

$$\operatorname{Lim\,inf}_\alpha [\varphi(u_\alpha, w_\alpha) - f(v_\alpha, w_\alpha)] \leqslant \varphi(u, w) - f(v, w).$$

COROLLAIRE DU THÉORÈME 1. *Le théorème* 1 *est encore vrai, si l'on remplace l'hypothèse* (l) *par les hypothèses* (l_1) et (l_2).

Preuve. Il suffit de montrer que (l_1) et (l_2) impliquent conjointement la propriété (l). Soit donc $(u_\alpha, v_\alpha) \in C_0 \times C_0$ une famille filtrée convergeant vers

(u, v) dans $E_0 \times E_0$ vérifiant $v_\alpha \in S(u_\alpha)$. Il faut montrer que $v \in S(u)$, ce qui revient à montrer que les inégalités

$$\varphi(u_\alpha, v_\alpha) \leqslant \varphi(u_\alpha, w) - f(u_\alpha, w), \qquad \forall w \in C,$$

qui sont vérifiées pour tout α, passent à la limite.

Soit $w \in C$. Comme $v_\alpha \in S(u_\alpha)$ la première inégalité dans (l_1) est satisfaite. Soit w_α donné par (l_2). En conséquence de (l_1) et (l_2) même, on trouve:

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &\leqslant \liminf_\alpha \varphi(u_\alpha, v_\alpha)\\ &\leqslant \liminf_\alpha[\varphi(u_\alpha, w_\alpha) - f(v_\alpha, w_\alpha)]\\ &\leqslant \varphi(u, w) - f(v, w),\end{aligned}$$

d'où, w étant quelconque, $v \in S(u)$.

Remarque. Si $\varphi \equiv 0$, toutes les hypothèses faites dans l'étape B sont une conséquence de la Proposition 2. Dans ce cas, donc, le théorème 1 est exactement le théorème 1 de [8].

Si $f \equiv 0$ et $\varphi(u, v) = \delta(Q(u), v)$, les hypothèses faites à l'étape A se réduisent à la condition que la multiplication Q donnée est à valeurs convexes fermées non vides et s.c.s.; comme dans ce cas $S(u) \equiv Q(u)$, le théorème 1 est alors exactement le théorème de Kakutani et Ky Fan.

Remarque. L'hypothèse (l_1) du corollaire est une propriété de s.c.i. de la fonction $(u, v) \Rightarrow \varphi(u, v)$; l'hypothèse (l_2) est une sorte de s.c.i. de la fonction $(v, w) \Rightarrow f(v, w)$.

En tout cas, le corollaire ne restreint pas essentiellement le domaine d'application du théorème 1. En effet ,par exemple, lorsque $\varphi \equiv 0$, si $f(v, v) = 0$ pour tout $v \in C$, on peut toujours satisfaire (l_2), en vertu de (jj), avec $w_\alpha = v_\alpha$; donc, dans ce cas, le corollaire se réduit encore, comme le théorème 1, au théorème de [8]. Par contre, si $f \equiv 0$, la condition (l_2) devient:

$$\liminf_\alpha[\inf_{v \in C} \varphi(u_\alpha, v)] \leqslant \inf_{v \in C} \varphi(u, v), \tag{14}$$

qui est toujours vérifiée si $\varphi(u, v)$ est de la forme $\delta(Q(u), v)$. Dans ce dernier cas, le corollaire est le théorème de Kakutani–Ky Fan.

4. *Le cas monotone*

On dit que f est *monotone* si:

$$f(v, w) + f(w, v) \geqslant 0, \qquad \forall (v, w) \in C \times C. \tag{15}$$

Comme $f(v, v) \leqslant 0$, $\forall v \in C$, la propriété (15) implique en particulier que $f(v, v) = 0$, $\forall v \in C$.

Par analogie avec les inéquations variationnelles pour des opérateurs monotones hemicontinus, on associe au problème (1) le problème qui consiste à trouver $u \in C_1$ vérifiant:

$$\varphi(u, u) \leqslant \varphi(u, w) + f(w, u), \qquad \forall w \in C, \tag{1bis}$$

et qui a évidemment comme solutions les points fixes de la multiplication T définie pour tout $u \in C_1$ par

$$T(u) = \{v \in C \mid \varphi(u, v) \leqslant \varphi(u, w) + f(w, v), \forall w \in C\} \tag{16}$$

Remarque. Si l'hypothèse de convexité (h) est satisfaite, alors $T(u)$ est un ensemble convexe quel que soit $u \in C_1$.

La proposition suivante, établit des conditions pour qu'il y ait l'équivalence entre les deux problèmes (1) et (1bis); c'est l'analogue d'un lemme classique de Minty et F. Browder.

L'hypothèse de convexité (i) est ici renforcée par la condition supplémentaire (ii) suivante:

(ii) Si $\varphi(u, v) < +\infty$, alors l'inégalité stricte satisfaite par w dans (i) reste encore vraie, même si une (et une seule) des inégalités strictes vérifiées par w_1 et w_2 est remplacée par une inégalité non-stricte.

PROPOSITION 3. *Si f est monotone, alors $S(u) \subset T(u)$ pour tout $u \in C_1$. Inversement, si φ et f vérifient les propriétés de convexité* (i) (ii) *et de semi-continuité* (j), *alors $T(u) \subset S(u)$ pour tout $u \in C_1$.*

Preuve. Supposons f monotone. Soit $v \in S(u)$: on a

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &\leqslant \varphi(u, v) + f(v, w) + f(w, v)\\ &\leqslant \varphi(u, w) + f(w, v)\end{aligned}$$

pour tout $w \in C$; donc $v \in T(u)$.

Démontrons l'inclusion inverse. Soit $v \in T(u)$, $u \in C_1$. Si $v \notin S(u)$, il existe $\bar{w} \in C$ tel que:

$$\varphi(u, v) + f(v, \bar{w}) > \varphi(u, \bar{w}).$$

Si $v_t = t\bar{w} + (1 - t)v$, pour tout $0 < t < 1$, il vient, à cause de (j), que:

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{t \downarrow 0}[\varphi(u, v_t) + f(v_t, \bar{w})] \geqslant \varphi(u, v) + f(v, \bar{w}) > \varphi(u, \bar{w})$$

donc il existe $0 < \bar{t} < 1$ tel que:

$$\varphi(u, v_t) + f(v_t, \bar{w}) > \varphi(u, \bar{w}), \qquad \forall 0 < t < \bar{t}. \tag{17}$$

Comme $v \in T(u)$, on a:

$$\varphi(u, w) + f(w, v) \geqslant \varphi(u, v), \qquad \forall w \in C$$

ce qui implique:

$$\varphi(u, v_t) + f(v_t, v) \geqslant \varphi(u, v), \qquad \forall 0 < t < 1. \tag{18}$$

En outre $\varphi(u, \bar{w}) < +\infty$ et $\varphi(u, v) < +\infty$: comme, à cause de (i) dom $\varphi(u, \cdot)$ est convexe, on a aussi $\varphi(u, v_t) < +\infty$ pour tout $0 < t < 1$. On peut donc utiliser l'hypothèse (ii) sur les deux inégalités (17) et (18) satisfaites par v_t, ce qui nous donne l'inégalité stricte:

$$\varphi(u, v_t) + f(v_t, v_t) > \varphi(u, v_t), \qquad 0 < t < \bar{t}.$$

D'où la contradiction, car $f(v_t, v_t) \leqslant 0$.

Il est évident que l'hypothèse de convexité (h) du paragraphe 1 implique (ii) en même temps que (i); en outre, (h) entraîne que $T(u)$ est convexe quel que soit $u \in C_1$. On déduit donc, de la proposition 3, le

COROLLAIRE. *Si f est monotone et* (h) *et* (j) *sont satisfaites, alors $S(u) = T(u)$ pour tout $u \in C_1$ et $S(u)$ est convexe.*

Lorsque f est monotone, on verra qu'il est possible de remplacer l'hypothèse de semi-continuité (jj) dans la proposition 3 et le théorème 1 par la condition suivante:

(jjj) Sous les mêmes hypothèses que celles de (jj), on a à la limite;

$$\varphi(u, v) \leqslant \varphi(u, w) + f(w, v), \qquad \forall w \in D.$$

Remarque. L'avantage substantiel de (jjj) par rapport à (jj) est que—au contraire de (jj)—elle est satisfaite par toutes φ et f, telles que $\varphi(u, \cdot)$ soit s.c.i. et $f(v, \cdot)$ s.c.s. dans E il suffit donc de demander à la fonction $f(\cdot, w)$ la seule propriété (j) de semi-continuité sur les intersections de C avec les sous-espaces de dimension finie de E. C'est le cas des applications du paragraphe III.

La proposition 2 nous donne la:

PROPOSITION 4. *Si f est monotone et si les hypothèses* (i) (ii), (j) (jjj) *et* (c) *sont vérifiées, alors pour tout $u \in C_1$, $S(u)$ est non vide. En outre, $S(u)$ est contenu dans $C \cap L_u$, et il est fermé, si C l'est.*

Preuve. En vertu de la proposition 2, il suffit de montrer que sous les hypothèses (i) (ii) et (j), la propriété (jj) qui est utilisée dans la proposition 2 est une conséquence de (jjj).

Soit v_α convergeant vers $v \in D$, D étant un sous ensemble convexe de C. Comme dans les données de (jj), on suppose que:

$$\varphi(u, v_\alpha) + f(v_\alpha, w) \leqslant \varphi(u, w), \qquad \forall w \in D,$$

où $u \in C_1$. Il faut montrer qu'à la limite, on a:

$$\varphi(u, v) + f(v, w) \leqslant \varphi(u, v), \qquad \forall w \in D.$$

On peut évidemment supposer que $\varphi(u, w)$ n'est pas $= +\infty$ pour tout $w \in D$; il n'est pas restrictif alors de supposer $\varphi(u, v) < +\infty$. On raisonne comme dans la preuve de la propriété 3. Supposons qu'il existe $\bar{w} \in D$ tel que:

$$\varphi(u, v) + f(v, \bar{w}) > \varphi(u, \bar{w}).$$

Si pour tout $0 < t < 1$ on définit $v_t = tw + (1 - t)v$, on prouve comme dans la démonstration de la proposition 3, qu'il existe à cause de (j) une valeur $0 < \bar{t} < 1$, telle que:

$$\varphi(u, v_t) + f(v_t, \bar{w}) > \varphi(u, \bar{w}), \qquad \forall 0 < t < \bar{t}. \tag{19}$$

D'autre part, les inégalités satisfaites par v_α nous donnent, à cause de l'hypothèse (jjj):

$$\varphi(u, v_t) + f(v_t, v) \geqslant \varphi(u, v), \qquad \forall 0 < t < 1. \tag{20}$$

A partir de là, on raisonne exactement comme dans la démonstration de la propriété 3, (19) et (20) remplaçant (17) et (18).

Par analogie avec (l), on introduit la condition:

(m) La trace du graphe de la multiplication T, définie par (16), sur $C_0 \times C_0$ est fermée dans $E_0 \times E_0$.

On a le:

THÉORÈME 2. *Si f est monotone, si φ et f vérifient les propriétés de convexité* (h), *de semi-continuité* (j) (jjj) *et de coercivité* (c), *si en outre* (k) *et* (m) *sont vérifiées par rapport à un convexe C_0 dans $E_0 \hookrightarrow E$, alors le problème* (1) *admet une solution u dans C_0.*

Preuve. On a déjà remarqué que (h) entraîne (i) et (ii). Dans la preuve de la proposition 4, on a démontré que, sous les hypothèses (i) (ii) et (j), (jjj) implique (jj). En tenant compte du corollaire de la proposition 3, comme (h) et (j) sont satisfaites, l'hypothèse (m) entraîne soit (l) que (ll). Le théorème est donc une conséquence du théorème 1.

Dans les corollaires suivants, on introduit des conditions de continuité de φ par rapport à f qui entraînent la propriété de fermeture (m).

COROLLAIRE 1. *Le théorème 2 est encore vrai si l'on remplace l'hypothèse* (m) *par l'hypothèse* (l_1) *et l'hypothèse* (m_2) *suivante*:

(m_2) *Pour toute famille filtrée* (u_α, v_α) *comme dans* (l_1) *et pour tout* $w \in C$, *on peut trouver* $w_\alpha \in C$ *tels que*:

$$\operatorname*{Lim\,inf}_\alpha [\varphi(u_\alpha, w_\alpha) - f(v_\alpha, w_\alpha)] \leqslant \varphi(u, w) + f(w, v). \tag{21}$$

Preuve. Il suffit de montrer que sous les hypothèses (h) et (j), (l_1) et (m_2) impliquent la propriété (m). Soit donc $(u_\alpha, v_\alpha) \in C_0 \times C_0$, vérifiant $v_\alpha \in T(u_\alpha)$ et convergeant vers (u, v) dans $E_0 \times E_0$.

Il faut montrer que $v \in T(u)$. En vertu du corollaire de la proposition 3, on a $v_\alpha \in S(u_\alpha)$, c'est-à-dire:

$$\varphi(u_\alpha, v_\alpha) + f(v_\alpha, w) \leqslant \varphi(u_\alpha, w) \qquad \forall w \in C.$$

Donc (u_α, v_α) vérifie les hypothèses de la condition (l_1) d'où:

$$\varphi(u, v) \leqslant \liminf_\alpha \varphi(u_\alpha, v_\alpha).$$

En outre, en conséquence de (m_2), pour tout $w \in C$ il existe $w_\alpha \in C$ tel que l'inégalité (21) de (m_2) soit satisfaite. Comme:

$$\varphi(u_\alpha, v_\alpha) \leqslant \varphi(u, w_\alpha) - f(v_\alpha, w_\alpha)$$

pour tout α, il vient à la limite

$$\varphi(u, v) \leqslant \varphi(u, w) + f(w, v)$$

et comme w est arbitraire, $v \in T(u)$.

COROLLAIRE 2. *Le théorème 2 est encore vrai si l'on remplace l'hypothèse* (m) *par l'hypothèse* (l_1) *et les hypothèses* (m_3) *et* (m_4) *suivantes*:

(m_3) *Pour toute famille filtrée* (u_α, v_α) *comme dans* (l_1) *et pour tout* $w \in C$, *on peut trouver* $w_\alpha \in C$ *tel que*:

$$\liminf_\alpha [\varphi(u_\alpha, w_\alpha) - f(v_\alpha, w_\alpha) + f(v_\alpha, w)] \leqslant \varphi(u, w), \tag{22}$$

(m_4) *Pour tout* $w \in C, f(w, \cdot)$ *est* s.c.s. *sur* C_0.

Preuve. En vertu du corollaire 1, il suffit de montrer que, si f est monotone, alors (m_3) et (m_4) impliquent (m_2).

En effet (m_3) nous donne, à cause de la monotonie de f:

$$\varphi(u, w) \geqslant \operatorname*{Lim\,inf}_\alpha [\varphi(u_\alpha, w_\alpha) - f(v_\alpha, w_\alpha) - f(w, v_\alpha)]$$

d'où, résulte, à cause de (m_4), l'inégalité (21) réclamée dans (m_2):

$$\varphi(u, w) + f(w, v) \geqslant \operatorname*{Lim\,inf}_{\alpha}[\varphi(u_\alpha, w_\alpha) - f(v_\alpha, w_\alpha)].$$

Pour terminer ce n° 4, il est peut-être utile de résumer sous la forme d'un corollaire additionnel ce que donne le corollaire 3 dans le cas $\varphi(u, w) = \delta(Q(u), w)$.

Soit donc C un sous ensemble convexe fermé d'un e.l.s.c.

$$\text{$\underset{\sim}{Q}$ une multiplication défine sur une partie C_1 de C à valeurs dans les sous ensembles convexes fermés non vides de C;} \tag{23}$$

f, une fonction monotone définie sur $C \times C$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, nulle sur la diagonale, et telle que pour tout $v \in C$, $f(v, \cdot)$ soit concave et s.c.s. dans E, et pour tout $w \in C$, $f(\cdot, w)$ soit s.c.i. sur toute intersection de C avec les sous espaces de dimension finie de E; on suppose en outre f coercive en sens de (c), ou $\varphi \equiv 0$. (24)

Si $E_0 \hookrightarrow E$ et $C_0 \subset E_0 \cap C_1$, on dit que $\underset{\sim}{Q}$ est *f-continue* sur C_0 si la propriété suivante est vérifiée:

Pour toute famille filtrée dans $C_0 \times C_0$, vérifiant:

$$v_\alpha \in Q(u_\alpha) \text{ et } f(v_\alpha, w) \leqslant 0 \qquad \forall w \in Q(u_\alpha) \tag{25}$$

et convergeant vers (u, v) dans $E_0 \times E_0$, on a

(α) $v \in Q(u)$,

(β) quel que soit $w \in Q(u)$, il existe $w_\alpha \in Q(u_\alpha)$ tel que

$$\limsup_{\alpha}[f(v_\alpha, w) - f(v_\alpha, w_\alpha)] \geqslant 0.$$

La sélection variationnelle S est maintenant donnée, pour tout $u \in C_1$, par:

$$S(u) = \{v \in Q(u) \mid f(v, w) \leqslant 0 \ \forall w \in Q(u)\} \tag{26}$$

Corollaire 3. *Sous les hypothèses qui précèdent supposons que la condition* (k) *soit satisfaite par rapport à C_0, $C_0 \subset E_0$ et $E_0 \hookrightarrow E$, et que Q soit f-continue sur C_0 dans E_0. Alors il existe une solution u dans C_0 pour le problème*

$$u \in Q(u), \qquad f(u, w) \leqslant 0 \qquad \forall w \in Q(u). \tag{27}$$

III. Inéquations quasi-variationnelles pour un opérateur monotone

Nous reprenons ici les termes du paragraphe précédent, en particulier du corollaire 3, en les adaptant au cas des inéquations quasi-variationnelles pour un opérateur monotone.

On désigne maintenant par E un espace de Banach reflexif réel, de dual E', et par C une partie convexe fermée de E.

On se donne:

Q, une multiplication définie sur C à valeurs dans les sous ensembles convexes fermés non vides de E; (28)

A, une application de C dans E' qui soit: monotone,

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0 \qquad \forall u, v \in E;$$

hemicontinue, i.e., continue sur les sous-espaces de dimension finie de E dans E' faible. (29)

coercive sur C, i.e., il existe $v_0 \in C$ tel que

$$\langle Av, v - v_0\rangle \to +\infty \qquad \text{lorsque} \quad \| v \| \to +\infty, v \in C,$$

et on cherche $u \in C$ vérifiant l'I.Q.V.

$$u \in Q(u), \tag{30}$$

$$\langle Au, u - v\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in Q(u). \tag{31}$$

La sélection variationnelle S du paragraphe précédent est maintenant une véritable sélection de la multiplication Q donnée, définie, pour tout $u \in C$, par: $v \in S(u)$ si

$$v \in Q(u) \tag{32}$$

$$\langle Av, v - w\rangle \leqslant 0, \qquad \forall w \in Q(u) \tag{33}$$

Définition. Soit $E_0 \hookrightarrow E$ un espace de Banach et soit $D_0 \subset E_0 \cap C$. On dit que Q est *faiblement A-continue* sur D_0, si les deux propriétés suivantes sont vérifiée :

Quel que soit la suite (u_k, v_k) dans $D_0 \times D_0$, vérifiant:

$$v_k \in Q(u_k)$$
$$\langle Av_k, v_k - w\rangle \leqslant 0, \qquad \forall w \in Q(u_k)$$

et convergeant faiblement vers (u, v) dans $E_0 \times E_0$, on a:

(α) $v \in Q(u)$

(β) $\forall w \in Q(u), \quad \exists w_k \in Q(u_k)$ tel que

$$\limsup_k \langle Av_k, w - w_k\rangle \geqslant 0.$$

On a alors le:

THÉORÈME 3. *Soit Q et A vérifiant* (28) *et* (29) *et S donné par* (32) *et* (33). *On suppose qu'il existe un espace de Banach reflexif E_0 avec une injection continue dans E, et une partie convexe fermée non vide D_0 de E_0, $D_0 \subset E_0 \cap C$, tel que*

$$S(D_0) \subset 2^{D_0}, \tag{35}$$

$$S(D_0) \text{ borné dans } E_0. \tag{36}$$

Alors si Q est faiblement A-continue sur D_0, il existe une solution u de (30) (31) *qui appartient à D_0.*

Preuve. On applique le corollaire 3 du théorème 2, avec $f(v, w) = \langle Av, v - w\rangle$, $(v, w) \in C \times C$, et en choisissant pour ensemble C_0,

$$C_0 = \overline{\text{co}}(S(D_0)).$$

On dit que $A\colon C \to E'$, $C \subset E$, est *bornée*, si $A(B)$ est un sous-ensemble borné de E', pour tout ensemble $B \subset C$ borné dans E.

PROPOSITION 4. *Avec les notations de la définition, soit Q telle que:*

scs: *$\forall u_k \in D_0$ convergeant faiblement vers u dans E_0, pour tout $v_k \in Q(u_k) \cap D_0$ qui converge faiblement vers v dans E_0, on a $v \in Q(u)$;*

sci: *$\forall u_k \in D_0$ convergeant faiblement vers u dans E_0, pour tout $v \in Q(u)$ il existe $v_k \in Q(u_k)$ qui converge vers v dans E fort.*

Alors Q est faiblement A-continue sur D_0 dans E_0, quel que soit A borné.

Preuve. C'est une conséquence immédiate des définitions et du fait que $(v, w) \to \langle Av, w\rangle$ est continue sur $L \times$ (E fort) pour tout borné L de E.

COROLLAIRE. *Q est faiblement A-continue sur D_0 dans E_0 pour toute A bornée pourvu que Q soit une application continue de D_0 muni de la topologie faible de E_0 dans l'ensemble 2^E, ceci au sens de la convergence des ensembles convexes* [13] [22]: *si la suite u_k converge vers u dans E_0 faible, alors $Q(u) = \lim Q(u_k)$ dans E.*

Les conditions suffisantes énoncées dans la proposition 4 et son corollaire sont commodes parce qu'elles sont indépendantes de l'application A, pourvu que A soit bornée. Elles ne sont cependant pas vérifiées dans un certain nombre d'applications, comme nous le verrons plus loin.

Remarque 1. Si l'injection de E_0 dans E est *compacte* et si A est continue de E fort dans E' fort, on peut remplacer dans la proposition 4 les conditions scs et sci par:

scs': $\forall u_k \in D_0$ convergeant fortement vers $u \in D_0$ dans E et $\forall v_k \in Q(u_k) \cap D_0$ convergeant fortement vers v dans E, on a $v \in Q(u)$;

sci': $\forall u_k \in D_0$ convergeant fortement vers $u \in D_0$ dans E et $\forall v \in Q(u)$; il existe $v_k \in Q(u_k)$ convergeant vers v dans E faible.

Remarque 2. On peut remplacer (36) dans le théorème 3 par:

Il existe $v_0 \in \bigcap_{v \in D_0} Q(v)$ tel que: $\langle Av, v - v_0 \rangle \to +\infty$ si $\| v \| \to \infty$, $v \in D_0$. (37)

Remarque 3. S'il existe un Banach réflexif E_1 tel que:

$$E \hookrightarrow E_1, \qquad E_1' \hookrightarrow E'$$

les injections étant continues et d'image dense, et si

$$A(E_0) \subset E_1'$$

alors la condition (β) intervenant dans la A-continuité de Q peut être affaible en:

(β') $\forall w \in Q(u)$, $\exists w_k$ dans la fermeture de $Q(u_k)$ dans E_1, tel que:

$$\lim_{\alpha} \sup \langle Av_k, w - w_k \rangle_{E_1, E_1'} \geqslant 0.$$

IV. Quelques exemples

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ suffisamment régulière.

Soit L un opérateur différentiel linéaire de deuxième ordre, de la forme:

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} D^i a_{ij}(x) D^j + c(x) \tag{38}$$

avec a_{ij} et c dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose L uniformément elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad p \cdot px \in \Omega \tag{39}$$

quelque soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour u et v dans $H^1(\Omega)$, on pose:

$$a(u, v) = \sum_{i,j-1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) D^i u\, D^j v\, dx + c \int_{\Omega} uv\, dx \tag{40}$$

L'identité

$$\langle Lu, v \rangle = a(u, v) \qquad \text{pour} \quad u \in H^1(\Omega) \text{ et } v \in H_0^1(\Omega)$$

définit L comme un opérateur borné de $H^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$. On supposera toujours que a est la forme bilinéaire coercive sur $H_0^1(\Omega)$ [resp. $H^1(\Omega)$].

L'ensemble $\mathscr{F}$ des classes de fonctions définies presque partout dans Ω, est muni du cône positif habituel, $u > 0$ si $u(x) \geqslant 0$, $pp\ x \in \Omega$, ce qui en fait un espace réticulé.

$$\begin{aligned} [u \vee v](x) &= \sup(u(x), v(x)), \qquad pp x \in \Omega, \\ [u \wedge v](x) &= \inf(u(x), v(x)), \qquad pp x \in \Omega. \end{aligned} \tag{42}$$

On sait que $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont alors des sous-espaces coreticulés de l'ensemble $\mathscr{F}$ des classes de fonctions définies presque partout dans Ω; c'est-à-dire que la borne supérieure ou inférieure au sens de (42) de deux fonctions appartenant à un de ces espaces, appartient encore au même espace.

On montre aussi que si u_k et v_k sont deux suites de $H^1(\Omega)$ [resp. $H_0^1(\Omega)$] convergent faiblement vers u et v, alors la suite $u_k \vee v_k$ et la suite $u_k \wedge v_k$ convergent faiblement vers $u \vee v$ et $u \wedge v$ respectivement. Si on désigne par E l'espace $H^1(\Omega)$ ou l'espace $H_0^1(\Omega)$ et si f est donné dans $L^2(\Omega)$ par exemple, on s'intéresse dans la suite à l'I.Q.V.: trouver $u \in E$, tel que:

$$u \in Q(u), \tag{43}$$

$$a(u, u - w) \leqslant \langle f, u - w \rangle \qquad \forall w \in E,\ w \in Q(u). \tag{44}$$

où Q est une multiplication définie sur une partie C de E et à valeurs convexes fermées non vides de E.

Le plus souvent, la contrainte définie par la multiplication Q sera de la forme "obstacle" c'est-à-dire que pour tout $u \in C$, on aura:

$$Q(u) = \{v \in E = v \leqslant M(u)\}. \tag{45}$$

où M est un opérateur défini sur C et à valeurs dans $L^2(\Omega)$ par exemple où plus généralement de l'ensemble des classes de fonctions définies pp dans Ω, tel que pour tout $u \in C$, il existe $v \in E$ tel que $v \leqslant M(u)$.

Désignons par $\bar{u} \in E$, la solution de

$$a(\bar{u}, w) = \langle f, w \rangle, \qquad \forall w \in E. \tag{46}$$

qui, si $E = H_0^1(\Omega)$ s'interprète comme la solution d'un problème de Dirichlet homogène et si $E = H^1(\Omega)$ et si L et Ω sont assez réguliers, s'interprète comme la solution d'un problème de Neumann homogène, de second membre f dans les deux cas.

Soit $\mathscr{F}_1 = \{\varphi \in \mathscr{F} : \exists v \in E\ v \leqslant \varphi\}$. Notons $\sigma_f : \mathscr{F}_1 \to E$ d'application qui à $\varphi \in \mathscr{F}_1$ associe la solution $u \in E$ de:

$$u \leqslant \varphi \tag{47}$$

$$\langle Lu - f, u - w \rangle \leqslant 0 \qquad \forall w \leqslant \varphi,\ w \in E. \tag{48}$$

$\mathscr{F}_1$ est un cône contenant E et c'est un espace réticulé pour l'ordre induit par celui de $\mathscr{F}$. On a les résultats de comparaison suivants cf. [12].

PROPOSITION 5. $\sigma = \mathscr{F} \to E$ *est une application croissante*; *en particulier on a*

$$\sigma_f(\varphi) \leqslant \bar{u}, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{F}_1$$

Soit S la sélection variationnelle associée à (43) (44) avec Q donné (45) on déduit de la proposition 5 le résultat suivant:

PROPOSITION 6. *Quel que soit* $u \in C$ *on a*

$$S(u) \leqslant \bar{u}$$

et si M *est* [*dé*] *croissant*, S *est* [*dé*] *croissant.*

Preuve. Il suffit de remarquer que $S = \sigma_{f0} M$.

1. *Un exemple où M est décroissant et compact* (*Bensoussan–Lions* [6])

On choisit indifféremment $E = H^1(\Omega)$ ou $E = H_0^1(\Omega)$. On suppose que la fonction d'obstacle M vérifie les propriétés suivantes:

M est décroissant. (49)

$M(E) \subset E$ et M est compact dans le sens suivant: si u_k converge faiblement dans E vers u alors $M(u_k)$ converge fortement vers $M(u)$ dans E. (50)

$\{v \in E\colon v \leqslant M(\bar{u})\} \neq \varnothing.$ (51)

On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses* (49) (50) (51) *l'*I.Q.V. (43) (44) (45) *possède une solution* $u \in E$, *vérifiant*:

$$S(\bar{u}) \leqslant u \leqslant \bar{u}.$$

Preuve. On utilise le théorème 3 avec $E = E_0$ et $C = D_0$ définis par

$$D_0 = C = \{v \in E\colon v \leqslant \bar{u}\}.$$

Quel que soit $u \in D_0$, on a $M(u) \geqslant M(\bar{u})$ à cause de (49); on en déduit que $S(D_0)$ est borné. La $L - f$ continuité de S résulte de la proposition 4, tenant compte de (50).

2. *Un exemple où M est décroissant mais non décessairement compact (dû à la collaboration avec B. Hanouzet)*

On suppose $E = H_0^1(\Omega)$ et que M vérifie la propriété suivante:

$$M(H_0^1(\Omega)) \subset H_0^1(\Omega) \text{ et } M \text{ est faiblement continue pour les suites.} \tag{52}$$

THÉORÈME 5. *Sous les hypothèses* (49) (51) (52), *l'*I.Q.V. (43) (44) (45) *possède une solution* $u \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve. On choisit pour appliquer le théorème 3, les paramètres suivants.

$$C = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \leqslant \bar{u}\},$$
$$D_0 = \{v \in H_0^1(\Omega) : Lv \leqslant f\}$$

où $Lv \leqslant f$ est pris au sens des distributions sur Ω (c'est l'ordre polaire de l'ordre défini précédemment sur $H_0^1(\Omega)$, dans la dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$).

On remarque que $D_0 \subset C$ à cause du principe du maximum. On vérifie facilement que D_0 est stable par S et comme dans le théorème 4, on montre que $S(D_0)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour achever la démonstration du théorème 5 il reste à prouver la $L - f$ continuité de Q sur $C_0 = D_0$, muni de la topologie faible de $H^1, (\Omega)$. C'est l'objet du lemme 1 suivant:

LEMME 1. *Si* M: $H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *est décroissante et faiblement continue et si pour tout* $u \in C_0 = \{v \in H_0^1(\Omega) : Lv \leqslant f\}$ *on a*

$$Q(u) = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \leqslant M(u)\}$$

alors Q est faiblement $L - f$ *continue sur* C_0.

Preuve. Soit $(u_k, v_k) \in C_0 \times C_0$ vérifiant:

$$v_k \in Q(u_k),$$
$$\langle Lv_k, v_k - w\rangle \leqslant \langle f, v_k - w\rangle \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega),\ w \leqslant M(u_k)$$

et $u_k \rightharpoonup u$, $v_k \rightharpoonup v$.

On doit montrer que:

(α) $v \in Q(u)$,

(β) $\limsup_k \langle Lv_k - f, w - w_k\rangle \geqslant 0$.

La propriété (α) résulte de la continuité faible de M et du fait que le cône positif de $H_0^1(\Omega)$ est faiblement fermé.

Pour démontrer (β), on peut toujours à cause de la présence de la limite supérieure supposer que u_k converge aussi presque partout vers u. La démonstration résultera de la remarque suivante:

LEMME 2. *Soit* $u_k \in H_0^1(\Omega)$ *avec* $Lu_k \leqslant f$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *telle que* u_k *converge faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$, *et presque partout dans* Ω *vers* $u \in H_0^1(\Omega)$.

Alors la suite:

$$\varphi_k = \bigvee_{l \geqslant k} (u_l \vee u)$$

est dans $H_0^1(\Omega)$ *et converge faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *et presque partout dans* Ω *en décroissant vers la meme limite* u.

Démonstration du lemme 2. Il est déjà clair que $\varphi_k \in L^2(\Omega)$, car $Lu_k \leqslant f$ et $Lu \leqslant f$ impliquent que $u_k \leqslant \bar{u}$ et $u \leqslant \bar{u}$ et on sait que $L^2(\Omega)$ est complètement réticulé.

D'autre part, u_l, u et φ_k sont dans $\mathscr{F}_1$; de la proposition 5 résulte que:

$$\sigma_f(\varphi_k) \geqslant \sigma_f(u_l) \qquad \forall l \geqslant k,$$

$$\sigma_f(\varphi_k) \geqslant \sigma_f(u)$$

or, comme $\sigma_f(u_l) = u_l$ et $\sigma_f(u) = u$, on en déduit que $\sigma_f(\varphi_k) \geqslant \varphi_k$ par définition de φ_k. Par ailleurs $\sigma_f(\varphi_k) \leqslant \varphi_k$, donc:

$$\sigma_f(\varphi_k) = \varphi_k$$

ce qui prouve que $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$ et que $L(\varphi_k) \leqslant f$.

Remarquons au passage que ceci prouve en fait que toute suite dans D_0 admet une borne supérieure qui appartient à D_0. La suite $\varphi_k = \sigma_f(\varphi_k)$ est par ailleurs bornée dans $H_0^1(\Omega)$; Comme φ_k converge presque partout vers u, il en résulte que φ_k converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers u.

Ce lemme 2 permet d'éclairer la nature de la convergence, de $Q(u_k)$ vers $Q(u)$, lorsque (u_k) vérifie les propriétés du lemme 2.

LEMME 3. *Soit* (u_k) *comme dans le lemme* 2. *Alors*, $Q(u_k) = \{v \in H_0^1(\Omega)$: $v \leqslant M(u_k)\}$ *vérifie sci et scs de la propriété* 4 *de la section III.*

Démonstration du lemme 3. Soit (φ_k) donnée comme dans le lemme 2 et $Q(\varphi_k) = \{v \in H_0^1(\Omega): v \leqslant M(\varphi_k)\}$. La suite $Q(\varphi_k)$ est croissante pour l'inclusion donc tout $w \in \overline{\bigcup_k Q(\varphi_k)}$ est limite forte dans $H_0^1(\Omega)$ d'une suite $w_k \in Q(\varphi_k)$. D'autre part, $Q(u) \subset \overline{\bigcup Q(\varphi_k)}$ car si $w \leqslant M(u)$, la suite $w_k = w \wedge M(\varphi_k))$ qui est dans $H_0^1(\Omega)$ et dans $Q(\varphi_k)$, converge faiblement vers $w \wedge M(u) = w$; l'ensemble $\overline{\bigcup Q(\varphi_k)}$ est convexe fermé donc faiblement fermé ce qui démontre l'inclusion et prouve que tout $w \in Q(u)$ est limite forte de $w_k \in Q(\varphi_k)$. Comme $Q(\varphi_k) \subset Q(u_k)$, ceci achève la preuve du lemme 3 et donc du théorème.

Remarque. Ce résultat s'applique, avec les modification évidente dues à la considération d'espaces produits convenables, au système d'I.Q.V. suivant: Trouver $u = (u_1, u_2, \ldots, u_l) \in (H_0^1(\Omega))^l$ tel que:

$$u_i \leqslant \beta_i - \sum_{j \neq i} u_j ,$$

$$\langle Lu_i - f_i , u_i - w_i \rangle \leqslant 0 \qquad \forall w_i \in H_0^1(\Omega),\ w_i \leqslant \beta_i - \sum_{j \neq i} u_j$$

où les β_i sont dans $H^1(\Omega)$ et de trace sur Γ positive $d\Gamma$-presque partout.

3. *Un exemple où la fonction d'obstacle agit sur le bord. (dû à la collaboration avec Geymonat)*

On suppose les coefficients de l'opérateur L et le bord Γ de Ω, suffisamment réguliers pour que quel que soit $v \in H_L^1(\Omega)$

$$H_L^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : Lv \in L^2(\Omega)\}$$

on puisse définir la dérivée conormale associée à L

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, D^i v \cdot \cos(\nu, x_j)$$

(ν étant la normale extérieure à Γ), comme un élément du dual $H^{-1/2}(\Gamma)$ de $H^{1/2}(\Gamma)$, avec

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu_L} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C \| v \|_{H_L^1(\Omega)}$$

sachant que:

$$\| v \|_{H_L^1(\Omega)} = (\| v \|^2_{H^1(\Omega)} + \| Lv \|_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

Pour des théorèmes de trace de ce type, voir Lions–Magenes [22].

A tout $u \in H_L^1(\Omega)$, on associe le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$ défini par:

$$Q(u) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v\,|_\Gamma \geqslant h - \lambda \left\langle \varphi, \frac{\partial u}{\partial \nu_L} \right\rangle_{1/2,-1/2} \right\}. \tag{53}$$

où

$$h \in H^{1/2}(\Gamma),\ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

THÉORÈME 6. *Si le réel* λ *est positif et si* $h \in H^{1/2}(\Gamma)$ *est positif, alors* l'I.Q.V. (43) (44), *ou* Q *est définie par* (53), *possède une solution dans* $H_L^1(\Omega)$.

Preuve. On pose $E = H^1(\Omega)$, $C = H_L{}^1(\Omega)$ et $E_0 = H_L{}^1(\Omega)$ muni de la norme de $H_L{}^1(\Omega)$. Pour ensemble D_0, on choisit:

$$D_0 = \left\{ v \in H_L{}^1(\Omega) : Lv = f, \frac{\partial v}{\partial \nu_L} \geqslant 0 \right\}.$$

qui est clairement convexe, fermé et non vide parce que $\bar{u} \in D_0$.

L'ensemble D_0 est stable par S; en effet si $u \in D_0$ et $v = S(u)$ on voit en utilisant la formule de Green que:

$$\begin{aligned} Lv &= f && \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu_L} &\geqslant 0 && \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

donc que $v \in D_0$. D'autre part, la fonction $\underline{u}$ solution de

$$\begin{aligned} L\underline{u} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} &= h && \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

est dans tous les $Q(u)$ pour $u \in D_0$.

Enfin, la forme bilinéaire a vérifie la condition de coercivité sur D_0 de la remarque 2 de la section III.

Pour la $L - f$ continuité de Q, on peut utiliser la proposition 4: la condition sci est en particulier vérifiée si l'on choisit:

$$w_k = w + \tilde{\lambda} \left[\left\langle \varphi, \frac{\partial u}{\partial \nu_L} \right\rangle_{1/2,-1/2} - \left\langle \varphi, \frac{\partial u_k}{\partial \nu_L} \right\rangle_{1/2,-1/2} \right]$$

avec $\tilde{\lambda} \in H^1(\Omega)$ et $\tilde{\lambda}_{|\Gamma} = \lambda$.

4. *Des exemples où la fonction d'obstacle possède des propriétés de régularité*

Faisons les hypothèses de régularité suivantes:

Les coefficients a_{ij} de l'opérateur L sont dans $C^1(\bar{\Omega})$
$C = 0$ et Γ, le bord de Ω, est de classe C^2. (54)

Il existe $p \geqslant (n/2, 1)$ tel que $f \in L^p(\Omega)$.
Pour le même p, la fonction M vérifie les propriétés suivantes. (55)

$$M : H_0{}^1(\Omega) \to H^1(\Omega) \tag{56}$$

$$M(W^{2,p}(\Omega) \cap H_0{}^1(\Omega)) \subset W^{2,p}(\Omega). \tag{57}$$

$$\forall u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0{}^1(\Omega), \qquad M(u)_{|\Gamma} \geqslant 0. \tag{58}$$

Il existe $\nu \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ vérifiant:

$$f \geqslant Lu \geqslant f \wedge \nu$$

alors

$$L(M(u)) \geqslant \nu. \tag{59}$$

M est continue de $W^{2,p}$ faible dans $L^{p'}$ fort ($p' = p/(p-1)$). (60)

THÉORÈME 7. *Sous les hypothèses* (54) *à* (60) *l'I.Q.V.* (43) (44) *avec*:

$$Q(u) = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \leqslant M(u)\}$$

possède une solution dans $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Preuve. On vérifie d'abord que S est bien définie sur C parce que $L^p(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, pour tout p, si $n = 1$ et si $n \geqslant 2$ pour tout p tel que $p' < 2n/(n-2)$: or $p > n/2$ implique que $p' < n(n-2)$. Pour la même raison, $p > n/2$ assure que $W^{2,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $H^1(\Omega)$, ce qui nous autorise à poser:

$$E_0 = W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

E_0 étant normé par la norme induite par celle de $W^{2,p}(\Omega)$. Prenons alors:

$$D_0 = \{u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : f \geqslant Lu \geqslant f \wedge \nu\}.$$

où ν est donnée par (59) et démontrons que D_0 est stable par S.

L'estimation essentielle qui fournit le résultat est donnée par le lemme suivant dû à Lewy–Stampacchia [21], Mosco–Troianiello [23]:

LEMME. *Soit* $\psi \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *telle que* $L\psi$ *soit une mesure sur* Ω, $\psi_{|\Gamma} \geqslant 0$. *Alors la solution* $u \in H_0^1(\Omega)$ *du problème.*

$$\langle Lu, u - v \rangle \leqslant 0, \qquad \forall v \leqslant \psi \qquad u \leqslant \psi$$

vérifie les inégalités suivantes, au sens des mesures sur Ω:

$$0 \geqslant Lu \geqslant L\psi \wedge 0.$$

Soit donc $u \in D_0$; comme $u \in W^{2,p}(\Omega)$, on à cause de (57), $M(u) \in W^{2,p}(\Omega)$. Comme $p \geqslant n/2$, on déduit du théorème de Sobolev que $M(u) \in C(\bar{\Omega})$; d'autre part $L(M(u)) \in L^p(\Omega)$, donc définit une mesure sur Ω. On peut donc appliquer le lemme précédent (après translation de $\bar{u}$ qui appartient à $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1$ d'après des résultats classiques de régularité sur les équations). On obtient ainsi:

$$f \geqslant L(S(u)) \geqslant L(M(u)) \wedge f.$$

Or par hypothèse, $u \in D_0$, donc $L(u) \geqslant f \wedge \nu$. A cause de (59), il vient donc $L(Mu) \geqslant \nu$, et par suite:

$$f \geqslant L(S(u)) \geqslant f \wedge \nu$$

ce qui entraîne que $LS(u)) \in L^p(\Omega)$, donc que $S(u) \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et prouve que $S(u) \in D_0$.

L'ensemble D_0 est convexe, fermé borné dans $W^{2,p}(\Omega)$, donc dans E_0. Il est aussi non vide car il contient $\bar{u}$: on pose:

$$C_0 = D_0 .$$

Il reste à vérifier la $L - f$ continuité faible de la multiapplication Q sur $C_0 \times C_0$. Soit $(u_k, v_k) \in C_0 \times C_0$, avec $v_k = S(u_k)$; une suite convergeante faiblement dans $E_0 \times E_0$, c'est-à-dire dans $W^{2,p}(\Omega) \times W^{2,p}(\Omega)$, vers (u, v). A cause de (60), la limite vérifie $v \leqslant M(u)$, donc la propriété (α) de notre définition. Pour vérifier la propriété (β), w étant donné avec $w \leqslant M(u)$ et $w \in H^1{}_0(\Omega)$, on choisit $w_k = w \wedge M(u_k)$; comme $M(u_k)$ est positif sur Γ, $w_k \in H_0^1(\Omega)$. Par suite $w_k \in Q(u_k)$. La suite $M(u_k)$ converge fortement dans $L^{p'}(\Omega)$ vers $M(u)$ à cause de (60). Donc la suite $w \wedge M(u_k)$ converge fortement dans $L^{p'}(\Omega)$ vers $w \wedge M(u) = w$, La suite $L(u_k)$ étant bornée dans $L^p(\Omega)$, on peut passer à la limite dans l'expression suivante:

$$\lim_k(\langle Lu_k, w_k - w\rangle - \langle f, w_k - w\rangle) = 0$$

Le résultat se déduit alors du théorème 3.

Remarque. A titre d'exemple, la fonction d'obstacle suivante:

$$[M(u)](x) = k(x) + \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int |\operatorname{grad} u| \, dx$$

avec $k \in W^{2,p}(\Omega)$, $k \geqslant 0$ sur Γ, vérifie la propriété (59) pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $\nu = L(k)$.

Les deux exemples que nous donnons maintenant concernent des systèmes et se ramènent au cas précédent en raisonnant sur des espaces produits convenables.

Exemple 1. Le premier exemple reprend le cas décroissant examiné dans la paragraphe 2 de cette section.

On cherche: $u = (u_1, ..., u_l) \in H_0^1(\Omega))^l$ vérifiant:

$$u_i \leqslant \beta_i - \sum_{j \neq i} u_j , \tag{61}$$

$$\langle Lu_i - f_i , u_i - w_i\rangle \leqslant 0, \qquad \forall w_i \leqslant \beta_i - \sum_{j \neq i} u_j \tag{62}$$

sachant que $\beta_i \in W^{2,p}(\Omega)$, $\beta_i \geqslant 0$ sur Γ et $f_i \in L^p(\Omega)$, où $p > (n/2, 1)$.

THÉORÈME 8. *Le système d'I.Q.V.* (58), (59) *possède une solution dans* $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Preuve. On applique le théorème 7 dans une situation de produit $E = (H_0^1(\Omega))^l$. Les hypothèses (54) à (60) sont clairement vérifiées: pour (59), on peut choisir par exemple:

$$\nu_i = L\beta_i - \sum_{j \neq i} f_j .$$

EXEMPLE 2. Il s'agit de résoudre le système d'I.Q.$\bar{\Omega}$. suivant: trouver:

$$u = (u_1 ,..., u_l) \in (H_0^1(\Omega))^l$$

solution de:

$$u_i \leqslant \beta_i + \bigwedge_{j \neq i} u_j , \tag{63}$$

$$\langle Lu_i - f_i , u_i - w_i \rangle \leqslant 0, \qquad \forall w_i \leqslant \beta_i + \bigwedge_{j \neq i} u_j . \tag{64}$$

Pour ce qui converne l'origine d'un tel système voir Bensoussan–Lions [1], [2], [3], [4], [5].

On remarque aisément que la fonction d'obstacle intervenant dans ce problème est croissante, par suite les méthodes de Bensoussan–Lions [1] et de Tartar [25] permettent de démontrer l'existence dans $H_0^1(\Omega)$ d'une solution maximale et minimale; la première est limite d'une *suite* décroissante de sur-solutions au sens de Tartar [25]; la seconde est limite d'un filtre de sous-solutions.

Nous nous intéression ici à la régularité des solutions d'un tel système et nous obtiendrons des résultats d'approximations dans un sens fort des solutions maximales et minimales par des *suites* de sur et sous solutions.

THÉORÈME 9. *Supposons que pour un certain* $p > n/2$, 1) *on ait* $f_i \in L^p(\Omega)$, $\beta_i \in W^{2,p}(\Omega)$, $\beta_i \geqslant 0$ *sur* Γ; *alors il existe une solution de* (63) (64) *dans* $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *sous l'hypothèse supplémentaire*:

$$L\beta_i + L\beta_j \geqslant 0 \qquad \forall i \neq j. \tag{65}$$

Preuve. Il est déjà clair qu'il faut une condition de compatibilité pour que les inégalités (63), $i = 1,..., l$ possèdent une solution i.e., que Q possède un point fixe. En effet (63) entraîne que:

$$u_i \leqslant \beta_i + \bigwedge_{j \neq i} \left(\beta_j + \bigwedge_{k \neq j} u_k\right)$$

donc:

$$u_i \leqslant \bigwedge_{j \neq i} \left(\beta_i + \beta_j + u_i \wedge \left(\bigwedge_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} u_k\right)\right) \tag{66}$$

c'est-à-dire:

$$u_i \leqslant \bigwedge_{j\neq i} (\beta_i + \beta_j + h_i) \tag{67}$$

avec

$$h_i \leqslant u_i \,.$$

Par suite il est nécessaire que $\bigwedge_{j\neq i} (\beta_i + \beta_j) \geqslant 0$ donc que:

$$\beta_i + \beta_j \geqslant 0 \qquad \forall j \neq i \tag{68}$$

Mais il découle en principe du maximum que (68) résulte de $\beta_{i|\Gamma} \geqslant 0$ et de (65).

Cherchons maintenant à mettre en place le théorème 7. Posons $E = (H_0^1(\Omega))^l = C$; et montrons que le choix $E_0 = (W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^l$ est déjà convenable.

Désignons par:

$$K_i = \{u_i \in H_0^1(\Omega): Lu_i \leqslant f_i \text{ au sens des distributions sur } \Omega\}.$$

LEMME 1. *Le cône* $K = \prod_{i=1}^{l} (K_i \cap W^{2,p}(\Omega))$. *est invariant par* S. *On a de plus l'estimation suivante: si* $u = (u_1, ..., u_l) \in K$ *et si* $S(u) = (S_1(u), ..., S_l(u))$, *on a*:

$$f_i \geqslant L(S_i(u)) \geqslant \left[\beta_i + \bigwedge_{j\neq i} (Lu_j)\right] \wedge f_i$$

Preuve du lemme 1. On remarque que $u_i \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ n'entraîne pas que $\bigwedge_{j\neq i} u_j \in W^{2,p}(\Omega)$. Néanmoins, d'après un lemme de Brezis [7], (cf. aussi lemme 2 du théorème 5), on sait que $L(\bigwedge_{j\neq i} u_j)$ est mesure qui vérifie, au sens des mesures dans Ω):

$$L\left(\bigwedge_{j\neq i} u_j\right) \geqslant \bigwedge_{j\neq i} L(u_j) \tag{68}$$

autrement dit $L(\wedge\, u_j)$ peut posséder une composante singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, mais elle reste minorée par une mesure à densité dans $L^p(\Omega)$. Cette minoration suffit pour appliquer l'inégalité de Lewy–Stampacchia (lemme du théorème 7) et pour en déduire que $L(S_i(u))$ est à densité dans $L^p(\Omega)$. En effet, $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$, donc u_i et par suite $\bigwedge_{j\neq i} u_j$ sont des $C(\overline{\Omega})$ puisque $p > n/2$ D'autre part, nous venons de voir que $L(\wedge\, u_j)$ est une mesure; on obtient donc via l'inégalité de Lewy–Stampacchia:

$$f_i \geqslant L(S_i(u)) \geqslant \left[L\beta_i + L\left(\bigwedge_{j\neq i} u_j\right)\right] \wedge f_i \tag{69}$$

utilisant (68), il vient:

$$f_i \geqslant L(S_i(u)) \geqslant \left[L\beta_i + \bigwedge_{j\neq i} L(u_j)\right] \wedge f_i \tag{70}$$

Par suite, en vertu du théorème de Radon–Nikodym:

$$L(S_i(u)) \in L^p(\Omega)$$

et (résultat de régularité pour les équations)

$$S_i(u) \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

ce qui prouve notre lemme.

Cherchons maintenant un ensemble D_0 de la forme.

$$D_0 = \{u = (u_1, \dots, u_l) \in (W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^l : f_i \geqslant Lu_i \geqslant \mu_i \ i = 1, \dots, l\}$$

avec $\mu_i \in L^p(\Omega)$, de telle sorte qu'il soit invariant pour S.

A cause du lemme, il suffit de trouver u_i tels que $Lu_i \geqslant \mu_i$ entraîne que $L(S_i(u) \geqslant \mu_i$.

Tenant compte de l'estimation (70), ceci sera réalisé si le système d'inégalités suivant:

$$L\beta_i + \bigwedge_{j \neq i} \mu_j \geqslant \mu_i \tag{71}$$

possède une solution des $L^p(\Omega)$, vérifiant de plus $\mu_i \leqslant f_i$. Remarquons l'analogie entre (71) et (63). Pour que (71) possède une solution il est nécessaire que les inégalités suivantes aient une solution:

$$\bigwedge_{j \neq i} \left(L\beta_i + L\beta_j + \mu_i \wedge \left(\bigwedge_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \mu_k \right) \right) \geqslant \mu_i \tag{72}$$

donc finalement qu'on ait:

$$L\beta_i + L\beta_j \geqslant 0, \qquad i \neq j,$$

ce qui est l'hypothèse (65) de notre théorème.

Posons donc $\mu_i = L\beta_i/2 - g$, avec $g \in L^p(\Omega)$. On doit avoir pour vérifier (71):

$$L\beta_i + \left(\bigwedge_{j \neq i} \frac{L\beta_j}{2} \right) - g \geqslant \frac{L\beta_i}{2} - g. \tag{73}$$

Il est clair que (65) implique (73) pour tout $g \in L^p(\Omega)$. Pour que $\mu_i \leqslant f_i \ i = 1, \dots, l$, on choisit alors:

$$g = \bigvee_{i=1}^{l} \left(\frac{L\beta_i}{2} - f_i \right)$$

Finalement, l'ensemble D_0, défini pour les μ_i donnés par:

$$\mu_i = \frac{L\beta_i}{2} - \bigvee_{j=1}^{l} \left(\frac{L\beta_j}{2} - f_j \right) \tag{74}$$

est stable par S. La démonstration du théorème 9 s'achève comme pour les théorèmes précédents.

Désignons par $\bar{u} = (\bar{u}_1, ..., \bar{u}_l)$ la solution de:

$$\bar{u}_i \in H_0^1(\Omega), \tag{75}$$

$$L\bar{u}_i = f_i \tag{76}$$

et par: $\underline{u} = (\underline{u}_1, ..., \underline{u}_l)$ la solution de:

$$\underline{u}_i \in H_0^1(\Omega), \tag{77}$$

$$L\underline{u}_i = \mu_i \tag{78}$$

où les μ_i sont donnés par (76).

On a alors le résultat d'approximation suivant:

THÉORÈME 10. *La suite $S^n(\bar{u})$ de sous-solutions de* (63), (64) *converge en décroissant dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible vers la solution maximale de* (63) (64) *dans D_0.*

La suite de sous-solutions, $S^n(\underline{u})$ converge en croissant dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible vers la solution minimale de (63), (64) *dans D_0.*

Preuve. $\bar{u}$ et $\underline{u}$ étant dans D_0, les deux suites $S^n(\bar{u})$ et $S^n(\underline{u})$ restent dans D_0 et sont respectivement décroissante et croissante. D_0 étant faiblement compact dans $W^{2,p}(\Omega)$, elles convergent toutes deux vers des limites notées respectivement $\bar{\bar{u}}$ et $\underline{\underline{u}}$, dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible.

Reprenant un raisonnement déjà utilisé dans le lemme 3 du théorème 5, on montre facilement que:

$$\bar{\bar{u}} = S(\bar{\bar{u}}).$$

Utilisant ensuite les arguments du lemme 3 du même théorème 5, on voit que:

$$\underline{\underline{u}} = S(\underline{\underline{u}}).$$

Les propriétés de maximalité et de minimalité de $\bar{\bar{u}}$ et $\underline{\underline{u}}$, n'offrant pas de difficulté, ceci achève la démonstration.

REFERENCES

1. A. BENSOUSSAN, M. GOURSAT, ET J. L. LIONS, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), 1279–1284.
2. A. BENSOUSSAN ET J. L. LIONS, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), 1411–1415.
3. A. BENSOUSSAN ET J. L. LIONS, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), 1189–1192.
4. A. BENSOUSSAN ET J. L. LIONS, *C. R. Acad. Sci. Paris* **276** (1973), 1333–1338.
5. A. BENSOUSSAN ET J. L. LIONS, *C. R. Acad. Sci. Paris* **278** (1974), 747–750.

6. A. Bensoussan et J. L. Lions, *in* "Séminaire d'analyse convexe, St Pierre de Chartreuse, Décembre 1973."
7. H. Brezis, *J. Math. Pures Appl.* **51** (1972), 1–168.
8. H. Brezis, L. Nirenberg, et G. Stampacchia, *Bull. Un. Mat. Ital.* (4) **6** (1972), 193–300.
9. K. Fan, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **38** (1952), 121–126.
10. K. Fan, *Math. Ann.* **142** (1961), 305–310.
11. K. Fan, *in* "Inequalities III" (O. Shisha, Ed.), pp. 103–113; Academic Press, New York, 1972.
12. Y. Haugazeau, thèse, Paris.
13. J. L. Joly, *J. Math. Pures Appl.* **52** (1973), 421–441.
14. J. L. Joly et U. Mosco, *C. R. Acad. Sci. Paris* **279** (1974), 499.
15. J. L. Joly et U. Mosco, *in* "Journées d'analyse convexe, Rome, Avril 1974."
16. J. L. Joly et U. Mosco, *in* "Colloque International I.R.I.A. Laboria Rocquencourt, Juin 1974," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems No. 107, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1974.
17. J. L. Joly, U. Mosco, et G. M. Troianiello, *C. R. Acad. Sci. Paris* **279** (1974), 937.
18. J. L. Joly, U. Mosco, et G. M. Troianiello, *J. Math. Anal. Appl.* **61** (1977), 357–369.
19. S. Kakutani, *Duke Math. J.* **8** (1941), 457–459.
20. C. Lescarret, *C. R. Acad. Sci. Paris* **261** (1965), 1160–1163.
21. H. Lewy et G. Stampacchia, *J. Analyse Math.* **23** (1970), 227–236.
22. J. L. Lions et E. Magenes, "Problèmes aux limites non homogènes," t. 1, Dunod, Paris, 1968.
23. U. Mosco, *Advances in Math.* **3** (1969), 510–585.
24. U. Mosco et G. M. Troianiello, *Bull. Un. Mat. Ital.* (4) **8** (1973), 57–67.
25. Tartar, *C. R. Acad. Sci. Paris* **278** (1974), 1193–1196.